Splineinterpolation

Ralf Jungblut

Ausarbeitung zum Vortrag vom 26. Oktober 1994
Version vom 8. Februar 1995

Seminar
der
Projektgruppe Systementwurf
unter Prof. F.J. Rammig / C. Nagel
WS 94/95 und SS 95

Inhaltsverzeichnis

1 Korrekturen

Dieses Skript im Rechnernetz weicht ab sofort von dem im gedruckten Skript ab. Zum einen sind Korrekturen enthalten, und desweiteren existiert das Kapitel Korrekturen (man liest es gerade), das eine Übersicht über die korrigierten‘ Fehler enthält. Folgende Fehler sind bereinigt worden:

1.) Kapitel Beispiel, „Wir wissen:“: Formel für c_i korrigiert. (22.12.94)
2.) Kapitel Algorithmus, 1. Absatz: se- quentiell → sequentiell (11.01.95)
3.) Kapitel Einleitung, 5. Absatz: vorigen → vorherigen (08.02.95)
4.) Kapitel Beispiel, letzter Absatz: vorigen → vorherigen (08.02.95)

2 Vorwort

In der Projektgruppe Systementwurf (WS 94/95 - SS 95) soll ein Koprozessor für den Sparc 601 konstruiert werden, der für in kartesischen Koordinaten gegebene Punkte eine Splinefunktion berechnet und ausgibt. Diese Arbeit setzt voraus, daß alle Beteiligten eine Splineinterpolation durchführen können. Deshalb ist es nicht die eigentliche Mathematik, die den hauptsächlichen Gegenstand dieser Ausarbeitung darstellt (ebensowenig war sie es im Vortrag). Viel mehr kommt es mir auf die Handhabung und Anwendung der Splineinterpolation an, deren Einfachheit ich im Vortrag aufzuzeigen versucht habe und hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich zur Verfügung stellen möchte.

Ich habe mich natürlich bemüht, diese Ausarbeitung fehlerfrei und leicht verständlich zu verfassen. Da sich der Fehlerteufel trotzdem gerne bemerkbar macht, möchte ich alle Leser bitten, mir Fehler, aber auch unverständliche Textstellen aufzuzeigen. Ich bitte, dies per Mail an folgende Adresse zu erledigen: jungblut@uni-paderborn.de

Für diese Ausarbeitung und den Vortrag habe ich mich auf die folgenden beiden Bücher gestützt, deren Ausführungen ebenfalls (relativ leicht) verständlich sind, jedoch einen wesentlich höheren (mathematischen) Anspruch besitzen:

Numerische Mathematik 1, J. Stoer, 5. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989
ISBN 3-540-51481-3
Numerische Mathematik, H. R. Schwarz, 2. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988
ISBN 3-519-12960-4

Außerdem können mathematisch Interessierte in diesen beiden Büchern auch die Herleitungen der in dieser Ausarbeitung benutzten Formeln und Aussagen nachlesen. Ich habe darauf bewußt verzichtet, mathematische Beweise anzuführen. Vielmehr hoffe ich, mit dieser Ausarbeitung auch Nichtmathematikern die Splineinterpolation nahebringen zu können, wofür mathematische Beweisführung sicherlich nicht sehr sinnvoll ist, sondern eher zu Lustlosigkeit und damit Unverständnis führen würde.

Jetzt bleibt mir nur noch viel Spaß und Erfolg beim Durcharbeiten dieser Ausarbeitung zu wünschen.

Ralf Jungblut, 1994

3 Einleitung

Zunächst einmal möchte ich anschaulich erklären, was unter dem Begriff der Splineinterpolation zu verstehen ist: Unter Splineinterpolation versteht man das Hindurchlegen einer Funktion **durch** eine gegebene Menge von Punkten in einem (kartesischen) Koordinatensystem.

Dies sollte man sich einfach mal geistig vorstellen. Wir haben eine fast beliebige Menge von n Punkten, hier Stützstellen, deren X-Werte paarweise verschieden und aufsteigend sortiert sein sollen. Wenn wir nun diese Punkte der Reihe nach durch eine Kurve verbinden wollen, so können wir dies auf verschiedene Weisen tun:

1. Wir verbinden die Punkte durch eine sehr stark geschwungene Linie, die zwischen den Stützpunkten sehr große Y-Werte annimmt. Dabei sollen diese Y-Werte wesentlich größer sein als die extremalen Y-Werte unserer gegebenen Stützpunkte. Wir erhalten damit eine Kurve, die sehr starke Schwingungen aufweist. Mathematisch kommt dieses Verfahren der einfachen Polynominterpolation gleich, wobei man diese Kurve (Polynom) durch Lösen eines linearen Gleichungssystems erhält. Das lineare Gleichungssystem besteht aus n (= Anzahl der Stützstellen) Polynomgleichungen vom Grad (n-1). Man setzt nun die Stützstellen in diese Gleichungen ein und erhält damit die Koeffizienten des gesuchten Polynoms unserer Kurve. Auch dieses Polynom zeichnet sich im allgemeinen durch hohe Schwingungen aus, welche in starkem Zusammenhang mit dem Grad des Polynoms stehen. Offensichtlich wächst der Grad des Polynoms proportional mit der Anzahl der Stützstellen. Die starken Schwingung und der hohe Grad des Polynoms sind zwei große Nachteile.

2. Nun können wir diese Kurve aber auch stückweise zusammensetzen. Nehmen wir zum Beispiel Polynome 1. Grades, also einfache Geraden, die je zwei benachbarte Punkte verbinden. Hier verkleinern sich die zuvor gezeigten Nachteile: Offensichtlich schwingt die Kurve hier nur in einem Y-Bereich, der durch die Punkte selbst bestimmt wird. Der Grad ist beliebig, und damit beliebig klein (mindestens jedoch 1). Allerdings bekommen wir ein anderes Problem: Wir kriegen häßliche „Ecken“ an den Stützstellen. Mathematisch ausgedrückt: Das Polynom ist in den Punkten nicht stetig differenzierbar.

3. Wir sind aber mit der vorherigen Überlegung schon sehr dicht bei der Splineinterpolation. Sicherlich war es unklug, Polynome 1. Grades zu benutzen. Bei der Splineinterpolation nehmen wir Polynome dritten Grades (oder höher, aber ungerade). Damit haben wir Polynome kleinen Grades und können, wie wir später sehen werden, auch „Ecken“ in den Stützstellen vermeiden. Wir wollen uns auf Polynome dritten Grades beschränken, da wir den Grad ja möglichst klein halten wollen, um übergroße Schwingungen zu vermeiden. Prinzipiell würde sich aber bei höherem Grad (ungerade muß er allerdings sein) an den bisherigen Überlegungen und auch an den folgenden Betrachtungen in den nächsten Abschnitten nichts ändern.

Splineinterpolation wird in vielen Bereichen der Industrie und Forschung angewendet. So werden zum Beispiel die Seitenflächen vom Schiffen mit diesem Verfahren berechnet, um den Wasserwiderstand möglichst gering zu halten. Das gleiche gilt für die Autoindustrie bezüglich des Luftwiderstands, wie ich von einer Freundin erfahren habe, die gerade dort ein Praktikum absolviert und die Splineinterpolation direkt angewendet hat. Es lassen sich sicherlich noch weitere Bespiele finden, doch die hier genannten sollten ausreichen, um zu zeigen, daß dieses Thema nicht nur der Arbeitsbeschaffung dient. Der Begriff „Spline“ kommt übrigens aus dem Englischen und bedeutet so viel wie „elastisches Lineal“, „biegsame Latte“ oder (im Schiffsbau) „Straklatte“.

4 Definitionen

Für diejenigen, die sich nur für die praktische Anwendung der Splineinterpolation interessieren und nur das Verfahren nachlesen wollen, reicht es völlig aus, sich das Beispiel in Kapitel 5 anzuschauen. Bei geringem Vorwissen kann daran das Verfahren der Splineinterpolation auch gelernt werden.

Falls dieses Vorwissen nicht vorhanden ist oder doch sehr flüchtig geworden ist, ist es sicherlich sinnvoll, vorher dieses und das nächste Kapitel durchzuarbeiten.

Hier möchte ich nun zu erst ein paar mathematische Begriffe klären.

Da wäre zunächst einmal der Begriff Splineinterpolation, und da zuerst der letzte Teil, nämlich die Interpolation. Von **Interpolation** sprechen wir genau dann, wenn wir ein Polynom genau so legen, daß es durch alle gegebenen Punkte hindurchläuft. Mathematisch gesagt: Sei p(x) das gesuchte Interpolationspolynom, so muß für alle Punkte (x_i,y_i) folgendes gelten: p(x_i)=y_i. Das Gegenteil zur Interpolation ist die Approximation, bei der der Verlauf der Punkte durch das Polynom nur angenähert wird.

Andererseits spezialisieren wir uns hier auf eine Art von Interpolation, nämlich die der Splines. Bei einem **Spline** betrachten wir nicht nur ein Polynom, das die Punkte durchläuft, sondern eine ganze Gruppe von Polynomen, die je zwei benachbarte Punkte durchlaufen und in diesen Punkten „fließend" ineinander übergehen. Alle Polynome müssen p-mal stetig differenzierbar sein, dabei betrachen wir Polynome vom Grad (2p-1). In unserem Fall sollen die Polynome vom Grad 3 sein, d.h. sie müssen 2mal stetig differenzierbar sein.

Die oben genannten Punkte nennen wir **Stützpunkte**. Eigentlich ist dies recht anschaulich, da diese Punkte den Spline formen und stützen. Die X-Werte der Punkte nennen wir **Stützstellen**, die zugehörigen Y-Werte heißen **Stützwerte**.

Bei der Definition von Spline habe ich den Begriff „fließend" verwendet. In der Mathematik kann dieser Begriff durch den der Stetigkeit ersetzt werden. Für die **Stetigkeit** betrachtet der Mathematiker das Polynom an einem bestimmten Punkt (x,y) und berechnet den y-Wert des Polynoms an dieser Stelle x von beiden Seiten (Limes). Diese beiden y-Werte bezeichnet man als links- und rechtsseitige Grenzwerte für dieser Stelle. Die erste Bedingung für die Stetigkeit in diesem Punkt ist die Gleichheit dieser beiden Grenzwerte. Weiterhin muß aber auch die 1. Ableitung des Polynoms in diesem Punkt von beiden Seiten übereinstimmen.

Der letzte Begriff, den ich hier erläutern möchte, ist die **Differenzierbarkeit**. Damit ist die Berechnung der Steigung eines Polynoms in einem Punkt gemeint, also die erste Ableitung. Diese Formulierung ist rekursiv anzuwenden, d.h. die 2. Ableitung einer Funktion ist gleich der 1. Ableitung der 1. Ableitung dieser Funktion. Wie bei der Stetigkeit betrachtet man auch für die Differenzierbarkeit das Polynom punktweise. Mathematisch muß folgende Bedingung erfüllt sein, damit ein Polynom an der Stelle x_0 differenzierbar ist: $\underset{x \to 0}{lim} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

5 Die Mathematik

Betrachten wir nochmals das, was wir uns unter Splineinterpolation vorstellen. Wir haben eine nach x-Werten aufsteigende Menge Punkte gegeben, die wir durch Polynome 3. Grades verbinden wollen. Wir werden für die Polynome die einfachen Gleichungen der Form ax^3+bx^2+cx+d verwenden, so daß die Polynome selber bereits stetig sind. Bleibt also noch das Stetigkeitsproblem beim Übergang von einem Polynom in das andere.

Polynome 3. Grades geben uns 4 Freiheitsgrade, d.h. mit 4 paarweise unabhängigen Bedingungen können wir ein solches eindeutig bestimmen. In unserem Problem sind davon 2 Bedingungen jeweils durch die 2 Punkte gegeben, durch die das Polynom verlaufen soll. Bleiben also noch 2 Freiheitsgrade übrig. Genau diese 2 Freiheitsgrade sind aber nötig für die Stetigkeit in den Übergängen der Polynome. Dazu müssen die Steigungen, also die 1. Ableitungen beider Polynome, in diesem Punkt übereinstimmen. Damit sind unsere 4 Freiheitsgrade für alle inneren Punkte „verbraucht“, bei den beiden gegebenen Randpunkten haben wir allerdings keine zwei aneinanderstoßende Polynome, aber dafür haben wir hier formgebende Freiheiten.

An diesen Stellen können wir willkürlich Bedingungen setzen. Aus der Physik und deren Energietheorie kommt der Ansatz, daß sich die Steigung des Splines außerhalb der Stützpunkte nicht mehr ändern soll, d.h. die 2. Ableitung muß ab dem Randpunkt nach außen 0 sein. Veranschaulichung: Seien die Punkte Nägel auf einem Brett und unser Spline sei durch eine biegsame Latte dargestellt, die sich um die Nägel windet, so gibt es keinen Grund, warum die Latte sich außerhalb der Stützstellen noch biegen sollte. Da diese Betrachtung optisch aus der Natur gegriffen ist, nennt man diese Art von Spline auch **natürliche Splines**.

Daneben gibt es beispielsweise noch die periodischen Splines, bei denen man davon ausgeht, daß der Spline sich außerhalb der gegebenen Punkte in gleicher Weise fortsetzt. Damit erhalten wir die Bedingung, das der Y-Wert, die Steigung (1. Ableitung) und die Änderung der Steigung (2. Ableitung) im ersten Punkt gleich der im letzten Punkt sein muß, so daß man den Spline aneinandersetzen kann. Dies kommt z.B. bei Betrachtung von Sinuskurven vor, die ja bekanntlich periodisch sind. Oder man gibt vor, daß die Änderung der Steigung an den Randpunkten ein Vielfaches ist von der des 2. und vorletzten, d.h. $y_0''=ky_1''$ und $y_n''=ly_{n-1}''$. Dies sind dann sogenannte randglättende Splines. Aber hier wollen wir uns auf die natürlichen Splines beschränken.

Beschreiben wir nun die Splineinterpolation Schritt für Schritt. Uns seien die Stützpunkte in aufsteigender Reihenfolge (nach x-Werten geordnet) gegeben, und wir suchen die Polynome $s_i(x)$ zwischen je zwei benachbarten Punkten.

Gegeben:

$$(n+1) \text{ Stützstellen } (x_i, y_i) \ (i = 0..n)$$

Gesucht:

$$s_i(x) \text{ für das Teilintervall } [x_i\ ,\ x_{i+1}] \ (i = 0..n\text{-}1)$$

Für die folgenden Schritte möchte ich eine Vereinfachung einführen. Wie werden die Differenz zweier benachbarter Stützstellen durch h mit dem Index der niedriger numerierten Stützstelle ausdrücken. Damit verkürzen sich die folgenden Gleichungen und werden damit übersichtlicher.

Substitution:

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Außerdem werde ich die oben angegebene Struktur der Polynomgleichungen ein wenig verändern, was mathematisch allerdings wenig Bedeutung hat, wohl aber bei der Anwendung der Polynomgleichungen. Wir ersetzen ausnahmslos alle x durch $(x\text{-}x_i)$ und erhalten folgenden Ansatz:

Ansatz:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

jeweils gültig im Intervall $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$

Damit haben wir n Gleichung mit je 4 Unbekannten. Es ist allerdings nicht nötig, ein derartiges Gleichungssystem zu lösen, wenn wir weitere Vereinbarungen treffen:

Vereinbarungen:

$$s_i(x_i) = d_i = y_i$$

$$s_i(x_{i+1}) = a_i h_i{}^3 + b_i h_i{}^2 + c_i h_i + d_i = y_{i+1}$$

$$s_i'(x_i) = c_i$$

$$s_i'(x_{i+1}) = 3a_i h_i{}^2 + 2b_i h_i + c_i$$

$$s_i''(x_i) = 2b_i = y_i''$$

$$s_i''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i = y_{i+1}''$$

Diese Gleichungen werden wir jetzt nach den Unbekannten a_i, b_i, c_i, d_i auflösen und wir sehen, daß alle d_i bereits bekannt sind, da sie den y_i entsprechen:

Substitution:

$$a_i = \tfrac{1}{6h_i}(y_{i+1}'' - y_i'')$$

$$b_i = \tfrac{1}{2}y_i''$$

$$c_i = \tfrac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \tfrac{h_i}{6}(y_{i+1}'' + 2y_i'')$$

$$d_i = y_i$$

Offensichtlich sind damit noch 3n Variablen unbekannt, die jedoch nur noch von den y_i'' abhängen. Also müssen wir nur noch diese bestimmen, und dann sind wir auch schon fertig.

Dazu ersetzen wir die a_i, b_i und c_i in der Gleichung $s_i'(x_{i+1})$ durch die Substitutionen und erhalten folgende Gleichung:

Einsetzen:

$$s_i'(x_{i+1}) = \tfrac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) + \tfrac{h_i}{6}(2y_{i+1}'' + y_i'')$$

Diese Gleichung bestimmt die Steigung des Polynoms links von der Stelle x_{i+1}. Nun müssen wir die Steigung des Polynoms rechts von dieser Stelle so bestimmen, daß diese beiden Steigungen übereinstimmen. Dazu substituieren wie alle i durch i-1:

Substitution:

$$s_{i-1}'(x_i) = \tfrac{1}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) + \tfrac{h_{i-1}}{6}(2y_i'' + y_{i-1}'')$$

Die Gleichheit der Steigungen erreichen wir nun durch Gleichsetzen der letzten beiden Gleichungen an der Stelle x_i. Diese ist natürlich nur für die inneren Stützpunkte möglich:

Bedingung:

$$s'_{i-1}(\mathrm{x}_i) = s'_i(\mathrm{x}_i) \text{ für innere Stützstellen } \mathrm{x}_i$$

Schreiben wir die Polynome vollständig aus, dann erhalten wir folgende Gleichung:

Ausgeschrieben:

$$\frac{1}{h_{i-1}}(\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_{i-1}) + \frac{h_{i-1}}{6}(2y''_i + y''_{i-1})$$

$$= \frac{1}{h_i}(\mathrm{y}_{i+1} - \mathrm{y}_i) - \frac{h_i}{6}(2y''_{i+1} + y''_i)$$

Multiplizieren wie diese mit 6 und ordnen sie nach y'', dann bekommen wie folgendes:

x6, geordnet:

$$\mathrm{h}_{i-1}y''_{i-1} + 2(\mathrm{h}_{i-1} + \mathrm{h}_i)y''_i + \mathrm{h}_i y''_{i+1} - \frac{6}{h_i}(\mathrm{y}_{i+1} - \mathrm{y}_i) + \frac{6}{h_{i-1}}(\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_{i-1}) = 0$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß wir uns damit (n-1) Gleichungen geschaffen haben, in denen insgesamt (n+1) verschiedene y'' vorkommen. Mit anderen Worten: 2 y'' sind damit noch unbekannt. Diese 2 y'' werden durch eine der bereits oben erwähnten Vorgaben bestimmt:

natürlich:

$$y''_0 = y''_n = 0$$

randglättend:

$$y''_0 = ky''_1 \ , \ ly''_{n-1} = y''_n$$

k,l gegeben

periodisch:

$$\mathrm{y}_0 = \mathrm{y}_n \ , \ y'_0 = y'_n \ , \ y''_0 = y''_n$$

$$\Rightarrow \frac{h_{n-1}}{6}y''_{n-1} + \frac{h_{n-1}+h_0}{3}y''_n + \frac{h_0}{6}y''_1 = \frac{y_1-y_n}{h_0} - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

Damit sind wir fertig. Mit den Vorgaben und dem vorherigen Gleichungssystem bestimmen wir alle y''. Wir haben dann alle Variablen bestimmt, von denen die Koeffizienten unserer Polynome des Splines abhängen. Das wiederum heißt aber, daß wir die Polynome kennen.

6 Beispiel

Als Beispiel möchte ich hier nochmals das im Vortrag vorgestellte verwenden. Es ist relativ einfach nachzuvollziehen, und daher lag es nahe, es wieder anzuführen, auch zum Nachlesen des im Vortrag gehörten.

Wir haben folgende Stützpunkte, numeriert von 0 bis 3, gegeben:

Stützpunkte:

$$(-2,1)\ (-1,-2)\ (1,0)\ (4,3)$$

Weiterhin benötigen wir zunächst die Formeln, die uns die Gleichungen bringen, die bei der Betrachtung der Steigung in den Stützpunkten eine Rolle spielen:

Formeln:

$$\mathrm{h}_i = \mathrm{x}_{i+1} - \mathrm{x}_i$$

$$\mathrm{h}_{i-1}y''_{i-1} + 2(\mathrm{h}_{i-1} + \mathrm{h}_i)y''_i + \mathrm{h}_i y''_{i+1} - \frac{6}{h_i}(\mathrm{y}_{i+1} - \mathrm{y}_i) + \frac{6}{h_{i-1}}(\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_{i-1}) = 0$$

Die folgende Tabelle ergibt sich durch einfaches Einsetzen, i gibt die Nummer des betrachteten, inneren Stützpunktes wieder, die Gleichungen in der letzten Spalte entsprechen der obigen zweiten Formel mit eingesetzten Werten:

i	h_{i-1}	h_i	$\mathrm{h}_{i-1} + \mathrm{h}_i$	$\mathrm{y}_{i+1} - \mathrm{y}_i$	$\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_{i-1}$	$s'_{i-1}(\mathrm{x}_i) = s'_i(\mathrm{x}_i)$
1	1	2	3	2	-3	$y''_0 + 6y''_1 + 2y''_2 - 24 = 0$
2	2	3	5	3	2	$2y''_1 + 10y''_2 + 3y''_3 = 0$

Ich möchte hier nur den natürlichen Spline ansprechen. Für unser Projekt ist dies vollig ausreichend, das Beispiel wird dadurch übersichtlicher und verständlicher; es sollte kein Problem darstellen, eine andere Art von Splines und die damit verbundenen Bedingungen in dieses Verfahren einzusetzen.

Natürlicher Spline:

$$y''_0 = y''_n = 0$$

Diese Informationen setzen wir nun einfach in die Gleichungen der Tabelle ein, und wir erhalten:

Eingesetzt:

$$6y''_1 + 2y''_2 - 24 = 0$$

$$2y''_1 + 10y''_2 = 0$$

Und gelöst:

$$y''_1 = \frac{30}{7}$$

$$y''_2 = \frac{-6}{7}$$

Damit haben wir den ersten, leichten Teil der Splineinterpolation bereits hinter uns. Die Ergebnisse können wir nun in folgende, bekannte Gleichungen einsetzen, womit wir die Koeffizienten der Polynomgleichungen berechnen:

Bekannt:

$$y_0'' = 0$$

$$y_1'' = \frac{30}{7}$$

$$y_2'' = \frac{-6}{7}$$

$$y_3'' = 0$$

Wir wissen:

$$a_i = \frac{1}{6h_i}(y_{i+1}'' - y_i'')$$

$$b_i = \frac{1}{2}y_i''$$

$$c_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}h_i(y_{i+1}'' + 2y_i'')$$

$$d_i = y_i$$

Damit haben wir dann auch schon die Koeffizienten der Teilpolynome des Splines:

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-26}{7}$	1
1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{-11}{7}$	-2
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{13}{7}$	0

Diese brauchen wir dann nur noch einzusetzen und erhalten folgende Teilpolynome des Splines:

Für $x \in [-2,-1]$ gilt:

$$s_0(x) = \frac{5}{7}(x + 2)^3 - \frac{26}{7}(x + 2) + 1$$

Für $x \in [-1,1]$ gilt:

$$s_1(x) = \frac{-3}{7}(x + 1)^3 + \frac{15}{7}(x + 1)^2 - \frac{11}{7}(x + 1) - 2$$

Für $x \in [1,4]$ gilt:

$$s_2(x) = \frac{1}{21}(x - 1)^3 - \frac{3}{7}(x - 1)^2 + \frac{13}{7}(x - 1)$$

Damit sind wir fertig. Das Ergbnis dieses Beispiels finden Sie in grafischer Form als Abbildung 1 auf Seite 12, wobei die einzelnen Polynome in gesamter Form dagestellt, die Geraden außerhalb der gegebenen Punkte nicht gezeichnet sind.

7 Algorithmus

Das Wort Algorithmus ist eigentlich bereits viel zu hoch gegriffen. Durch das Beispiel im vorhergehenden Kapitel ist es offensichtlich geworden, daß die Splineinterpolation sequentiell und strukturiert ausführbar ist:

Gegeben:

$$\text{Stützpunkte } (x_i, y_i) \ (i = 0..n)$$

Berechnen:

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \ (i = 1..n\text{-}1)$$

$$y''_i \ (i = 0..n)$$

$$a_i, b_i, c_i, d_i \ (i = 0..n\text{-}1)$$

Dann bereits erhalten wir die Teilpolynome des Splines und können diese weiterverarbeiten.

Fertig ist die Splineinterpolation...

(Nebenläufiges Ergebnis: Das „Texen“ dieser Ausarbeitung dauert mindestens ewig länger als die Ausarbeitung selber.)

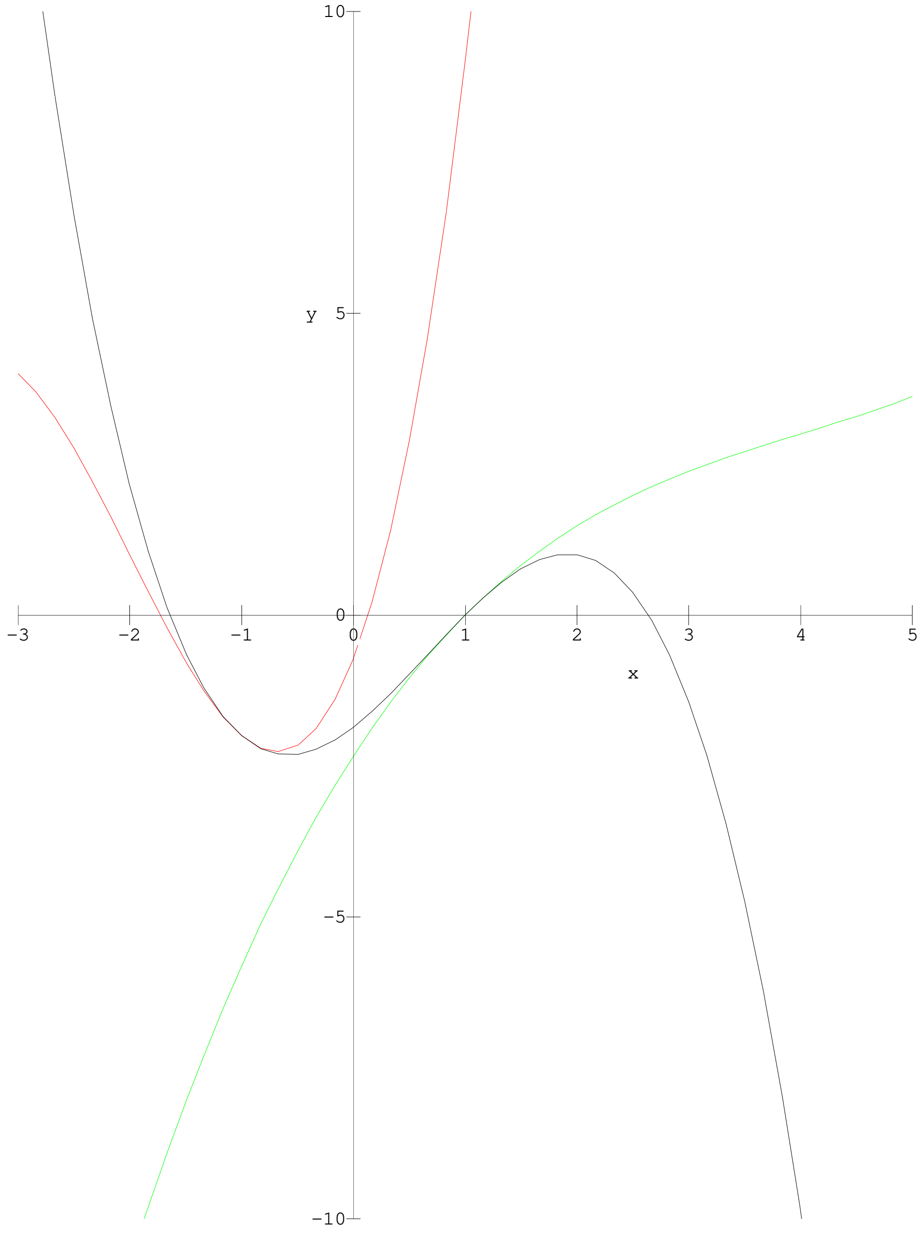

Abbildung 1: Bild Beispiel